

低维拓扑简介

叶 帆

北京大学

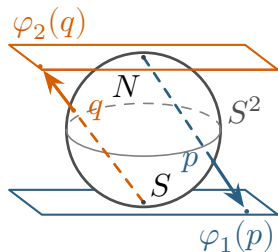
拓扑流形

n 维拓扑流形是 Hausdorff、第二可数的拓扑空间 M ，每一点都有邻域与 $\mathbb{R}^n$ 的开集同胚。带边流形还允许半空间 $\mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$ 的局部模型。

拓扑流形与微分流形

拓扑流形

n 维拓扑流形是 Hausdorff、第二可数的拓扑空间 M ，每一点都有邻域与 $\mathbb{R}^n$ 的开集同胚。带边流形还允许半空间 $\mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$ 的局部模型。



$$U_1 = S^2 \setminus \{N\}$$

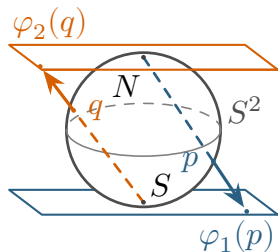
$$U_2 = S^2 \setminus \{S\}$$

立体投影给出两个坐标卡。

拓扑流形与微分流形

拓扑流形

n 维拓扑流形是 Hausdorff、第二可数的拓扑空间 M ，每一点都有邻域与 $\mathbb{R}^n$ 的开集同胚。带边流形还允许半空间 $\mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$ 的局部模型。



$$U_1 = S^2 \setminus \{N\}$$

$$U_2 = S^2 \setminus \{S\}$$

立体投影给出两个坐标卡。

- 同胚是连续且逆映射连续的双射。
- 微分结构是最大的相容坐标图册，坐标变换 $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ 均为 C^∞ 。
- 微分同胚要求映射及其逆均光滑。

不连通



$$S^1 \sqcup S^1$$

拓扑基本概念

不连通



$$S^1 \sqcup S^1$$

不单连通



环路不能缩成一点

拓扑基本概念

不连通



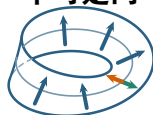
$$S^1 \sqcup S^1$$

不单连通



环路不能缩成一点

不可定向



Möbius 带

绕一周，局部定向反转

拓扑基本概念

不连通



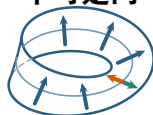
$$S^1 \sqcup S^1$$

不单连通



环路不能缩成一点

不可定向



Möbius 带

绕一周，局部定向反转

不紧



$$T^2 \setminus \{p\}$$

拓扑基本概念

不连通



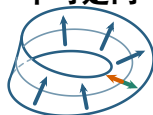
$$S^1 \sqcup S^1$$

不单连通



环路不能缩成一点

不可定向



Möbius 带

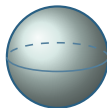
绕一周，局部定向反转

不紧



$$T^2 \setminus \{p\}$$

带边



$$B^3, \partial B^3 = S^2$$

球体，包含内部

拓扑基本概念

不连通



$$S^1 \sqcup S^1$$

不单连通



环路不能缩成一点

不可定向



Möbius 带

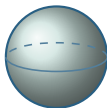
绕一周，局部定向反转

不紧



$$T^2 \setminus \{p\}$$

带边



$$B^3, \partial B^3 = S^2$$

球体，包含内部

闭 = 紧 + 无边



$$S^2$$

球面，只有表面

一维与二维的连通闭流形

- 一维只有圆 S^1 。

一维与二维的连通闭流形

- 一维只有圆 S^1 。
- 二维可定向由亏格 $g \geq 0$ 分类, $\Sigma_g = \#^g T^2$, $\Sigma_0 = S^2$ 。# 表示连通和。



$g = 0$



$g = 1$



$g = 2$

...

一维与二维的连通闭流形

- 一维只有圆 S^1 。
- 二维可定向由亏格 $g \geq 0$ 分类, $\Sigma_g = \#^g T^2$, $\Sigma_0 = S^2$ 。# 表示连通和。



$g = 0$



$g = 1$



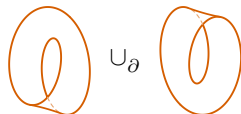
$g = 2$

...

- 二维不可定向为 $\#^k \mathbb{RP}^2$, $k \geq 1$ 。



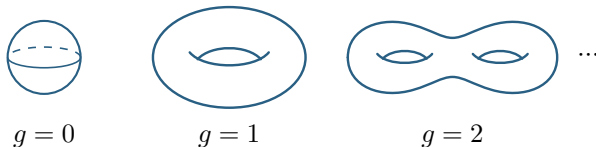
$\mathbb{RP}^2 = \text{Möbius 带} \cup_{\partial} D^2$



Klein 瓶 = Möbius 带 $\cup_{\partial}$ Möbius 带

一维与二维的连通闭流形

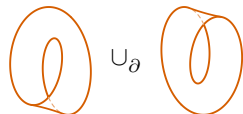
- 一维只有圆 S^1 。
- 二维可定向由亏格 $g \geq 0$ 分类, $\Sigma_g = \#^g T^2$, $\Sigma_0 = S^2$ 。# 表示连通和。



- 二维不可定向为 $\#^k \mathbb{RP}^2$, $k \geq 1$ 。



$\mathbb{RP}^2 = \text{Möbius 带} \cup_{\partial} D^2$



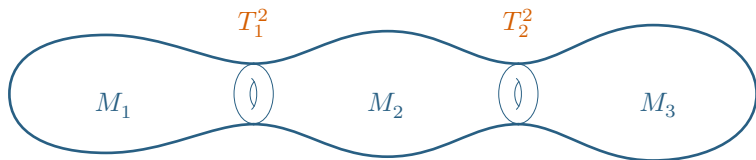
$\text{Klein 瓶} = \text{Möbius 带} \cup_{\partial} \text{Möbius 带}$

- 维数不超过 3 时, 微分结构存在且唯一, 同胚与微分同胚分类一致。

三维的几何化

Thurston 几何化猜想 Perelman '02-'03

连通、闭、可定向三维流形先沿 S^2 作连通和分解，再沿适当的 T^2 切开，各块的内部具有八种几何之一。



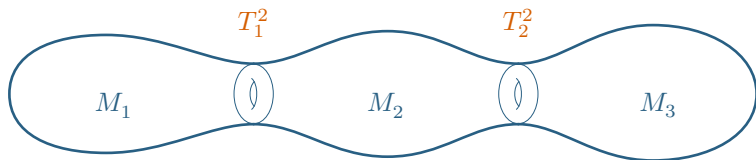
沿两个环面切开，得到三块

S^3 , $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{H}^3$, $S^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$, Nil, Sol.

三维的几何化

Thurston 几何化猜想 Perelman '02-'03

连通、闭、可定向三维流形先沿 S^2 作连通和分解，再沿适当的 T^2 切开，各块的内部具有八种几何之一。



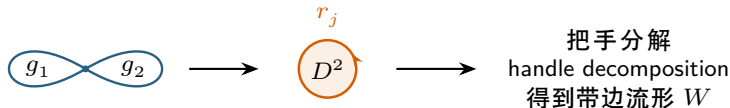
沿两个环面切开，得到三块

S^3 , $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{H}^3$, $S^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$, Nil, Sol.

- 每块具有几何结构，还需记录各块之间的粘合。
- 不可定向情形还可能沿 $\mathbb{RP}^2$ 和 Klein 瓶分解。

四维的基本群和相交形式

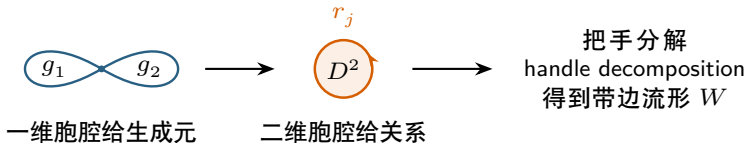
每个有限表现群 $G = \langle g_1, \dots, g_m \mid r_1, \dots, r_\ell \rangle$ 都是某个闭、连通、可定向光滑四维流形的基本群。构造方法为粘贴胞腔，再用把手分解实现。



将两份 W 沿边界对粘，得到闭流形，基本群仍为 G 。

四维的基本群和相交形式

每个有限表现群 $G = \langle g_1, \dots, g_m \mid r_1, \dots, r_\ell \rangle$ 都是某个闭、连通、可定向光滑四维流形的基本群。构造方法为粘贴胞腔，再用把手分解实现。



将两份 W 沿边界对粘，得到闭流形，基本群仍为 G 。

闭定向四维流形 M 的相交形式

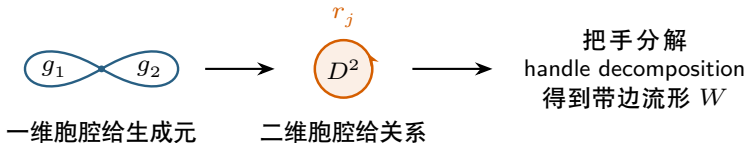
令 $V = H^2(M; \mathbb{Z})/\text{torsion}$ ，定义

$$Q_M: V \times V \rightarrow \mathbb{Z}, \quad Q_M(a, b) = \langle a \cup b, [M] \rangle.$$

由 Poincaré 对偶，也可用两个二维曲面的带符号交点计算。

四维的基本群和相交形式

每个有限表现群 $G = \langle g_1, \dots, g_m \mid r_1, \dots, r_\ell \rangle$ 都是某个闭、连通、可定向光滑四维流形的基本群。构造方法为粘贴胞腔，再用把手分解实现。



将两份 W 沿边界对粘，得到闭流形，基本群仍为 G 。

闭定向四维流形 M 的相交形式

令 $V = H^2(M; \mathbb{Z})/\text{torsion}$ ，定义

$$Q_M: V \times V \rightarrow \mathbb{Z}, \quad Q_M(a, b) = \langle a \cup b, [M] \rangle.$$

由 Poincaré 对偶，也可用两个二维曲面的带符号交点计算。

$$Q_{\mathbb{CP}^2} = (1), \quad Q_{\overline{\mathbb{CP}}^2} = (-1), \quad Q_{S^2 \times S^2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Q_M 是整系数对称么模矩阵，即 $\det Q_M = \pm 1$ 。

$b_2^\pm$ 是正、负特征值的个数， $b_2 = b_2^+ + b_2^-$ ， $\sigma = b_2^+ - b_2^-$ 。

四维的拓扑分类与微分限制

Freedman '82

每个整系数对称么模形式都由某个单连通闭定向拓扑四维流形实现。同胚类型由相交形式及 Kirby–Siebenmann 不变量决定。

特别地，相交形式为 0 的单连通闭四维流形同胚于 S^4 ，即四维拓扑 Poincaré 猜想成立。

四维的拓扑分类与微分限制

Freedman '82

每个整系数对称么模形式都由某个单连通闭定向拓扑四维流形实现。同胚类型由相交形式及 Kirby–Siebenmann 不变量决定。

特别地，相交形式为 0 的单连通闭四维流形同胚于 S^4 ，即四维拓扑 Poincaré 猜想成立。

Donaldson '83

单连通闭光滑四维流形的正定 / 负定相交形式同构于 $\pm \text{Id}$ 。

四维的拓扑分类与微分限制

Freedman '82

每个整系数对称幺模形式都由某个单连通闭定向拓扑四维流形实现。同胚类型由相交形式及 Kirby–Siebenmann 不变量决定。

特别地，相交形式为 0 的单连通闭四维流形同胚于 S^4 ，即四维拓扑 Poincaré 猜想成立。

Donaldson '83

单连通闭光滑四维流形的正定 / 负定相交形式同构于 $\pm \text{Id}$ 。

- 正定偶形式 E_8 可以拓扑实现，但不能光滑实现。

$$E_8 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

微分结构的存在与唯一性

问题一 是否存在

给定闭定向拓扑四维流形 M ，是否存在微分结构？

微分结构的存在与唯一性

问题一 是否存在

给定闭定向拓扑四维流形 M ，是否存在微分结构？

- Kirby–Siebenmann 不变量为 1 时，不存在微分结构。
- 单连通时，正、负定形式受 Donaldson 定理限制。
- 在其余单连通情形，不定形式的光滑实现问题归结为 11/8 猜想。

微分结构的存在与唯一性

问题一 是否存在

给定闭定向拓扑四维流形 M ，是否存在微分结构？

- Kirby–Siebenmann 不变量为 1 时，不存在微分结构。
- 单连通时，正、负定形式受 Donaldson 定理限制。
- 在其余单连通情形，不定形式的光滑实现问题归结为 11/8 猜想。

问题二 是否唯一

若微分结构存在，是否在微分同胚意义下唯一？

微分结构的存在与唯一性

问题一 是否存在

给定闭定向拓扑四维流形 M ，是否存在微分结构？

- Kirby–Siebenmann 不变量为 1 时，不存在微分结构。
- 单连通时，正、负定形式受 Donaldson 定理限制。
- 在其余单连通情形，不定形式的光滑实现问题归结为 11/8 猜想。

问题二 是否唯一

若微分结构存在，是否在微分同胚意义下唯一？

- 额外 (exotic) 微分结构指同胚但不微分同胚的结构。
- Fintushel–Stern '98 构造了无穷多个与 $K3$ 同胚、却两两不微分同胚的光滑四维流形。
- S^4 的唯一性问题即四维光滑 Poincaré 猜想 (4SPC)。

11/8 猜想

闭、单连通定向四维流形的相交形式分为奇、偶两类。

- **奇形式** 存在 a 使 $Q(a, a)$ 为奇数。不定时均由 $\mathbb{CP}^2$ 与 $\overline{\mathbb{CP}}^2$ 的连通和光滑实现。
- **偶形式** 对所有 a 都有 $Q(a, a) \in 2\mathbb{Z}$ ，在单连通情形等价于 spin 。

11/8 猜想

闭、单连通定向四维流形的相交形式分为奇、偶两类。

- **奇形式**存在 a 使 $Q(a, a)$ 为奇数。不定时均由 $\mathbb{CP}^2$ 与 $\overline{\mathbb{CP}}^2$ 的连通和光滑实现。
- **偶形式**对所有 a 都有 $Q(a, a) \in 2\mathbb{Z}$, 在单连通情形等价于 spin 。

Matsumoto '82 11/8 猜想

若 X 闭、单连通、光滑且为 spin , 则

$$b_2(X) \geq \frac{11}{8} |\sigma(X)|.$$

$K3$ 曲面有 $Q_{K3} = 2(-E_8) \oplus 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = 22$ 、 $\sigma = -16$, 恰好取等号。

11/8 猜想

闭、单连通定向四维流形的相交形式分为奇、偶两类。

- **奇形式**存在 a 使 $Q(a, a)$ 为奇数。不定时均由 $\mathbb{CP}^2$ 与 $\overline{\mathbb{CP}}^2$ 的连通和光滑实现。
- **偶形式**对所有 a 都有 $Q(a, a) \in 2\mathbb{Z}$ ，在单连通情形等价于 spin 。

Matsumoto '82 11/8 猜想

若 X 闭、单连通、光滑且为 spin ，则

$$b_2(X) \geq \frac{11}{8}|\sigma(X)|.$$

K3 曲面有 $Q_{K3} = 2(-E_8) \oplus 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ， $b_2 = 22$ 、 $\sigma = -16$ ，恰好取等号。

10/8 + 4 定理 Hopkins、林剑锋、时骁霖、徐宙利 '22

在同样假设下，若 X 不同胚于 S^4 、 $S^2 \times S^2$ 或任一定向的 K3，则

$$b_2(X) \geq \frac{10}{8}|\sigma(X)| + 4.$$

四维光滑 Poincaré 猜想

4SPC

每个与 S^4 同胚的光滑四维流形，是否都与 S^4 微分同胚？

4SPC

每个与 S^4 同胚的光滑四维流形，是否都与 S^4 微分同胚？

- Akhmedov–Park '10 构造了 $\mathbb{CP}^2 \# 2\overline{\mathbb{CP}}^2$ 的额外微分结构。
- 对每个 $k \geq 2$, $\mathbb{CP}^2 \# k\overline{\mathbb{CP}}^2$ 都有额外微分结构。 $k = 0, 1$ 仍未解决。

四维光滑 Poincaré 猜想

4SPC

每个与 S^4 同胚的光滑四维流形，是否都与 S^4 微分同胚？

- Akhmedov–Park '10 构造了 $\mathbb{CP}^2 \# 2\overline{\mathbb{CP}}^2$ 的额外微分结构。
- 对每个 $k \geq 2$, $\mathbb{CP}^2 \# k\overline{\mathbb{CP}}^2$ 都有额外微分结构。 $k = 0, 1$ 仍未解决。

近期预印本 Wuebben '26

给出了 $k = 1$ 的额外微分结构构造，但作者已指出其基本群关系推导有误。

高维流形与代数拓扑

- 高维 Poincaré 猜想要求 $M \simeq S^n$ 。 $S^{n-2} \times S^2$ 在 $n \geq 5$ 时单连通，却不同伦于 S^n 。Smale '61 证明光滑同伦 n 球面在 $n \geq 5$ 时都与 S^n 同胚。

高维流形与代数拓扑

- 高维 Poincaré 猜想要求 $M \simeq S^n$ 。 $S^{n-2} \times S^2$ 在 $n \geq 5$ 时单连通，却不同伦于 S^n 。Smale '61 证明光滑同伦 n 球面在 $n \geq 5$ 时都与 S^n 同胚。
- $n \leq 3$ 时球面微分结构唯一， $n = 4$ 尚未知。

n	5	6	7	8	9	10	11	12
保定向微分结构数	1	1	28	2	8	6	992	1

高维流形与代数拓扑

- 高维 Poincaré 猜想要求 $M \simeq S^n$ 。 $S^{n-2} \times S^2$ 在 $n \geq 5$ 时单连通，却不同伦于 S^n 。Smale '61 证明光滑同伦 n 球面在 $n \geq 5$ 时都与 S^n 同胚。
- $n \leq 3$ 时球面微分结构唯一， $n = 4$ 尚未知。

n	5	6	7	8	9	10	11	12
保定向微分结构数	1	1	28	2	8	6	992	1

$n > 12$ 时，哪些球面的微分结构唯一

- 奇数维仅有 $n = 61$ 。王国桢-徐宙利 '17。
- 偶数维在 $12 < n < 140$ 的范围内仅有 $n = 56$ ，更高维仍开放。Behrens-Hill-Hopkins-Mahowald '20。

高维流形与代数拓扑

- 高维 Poincaré 猜想要求 $M \simeq S^n$ 。 $S^{n-2} \times S^2$ 在 $n \geq 5$ 时单连通，却不同伦于 S^n 。Smale '61 证明光滑同伦 n 球面在 $n \geq 5$ 时都与 S^n 同胚。
- $n \leq 3$ 时球面微分结构唯一， $n = 4$ 尚未知。

n	5	6	7	8	9	10	11	12
保定向微分结构数	1	1	28	2	8	6	992	1

$n > 12$ 时，哪些球面的微分结构唯一

- 奇数维仅有 $n = 61$ 。王国桢–徐宙利 '17。
- 偶数维在 $12 < n < 140$ 的范围内仅有 $n = 56$ ，更高维仍开放。Behrens–Hill–Hopkins–Mahowald '20。
- $n \geq 5$ 时，球面的微分结构组成连通和群 Θ_n (Kervaire–Milnor '63)。
- M^n 与同伦球面 Σ^n 的连通和同胚于 M ，微分结构可能不同。一般流形的微分结构分类仍是开放问题。

低维拓扑的研究方向 二维与三维

- 二维 映射类群、Teichmüller 空间与模空间，联系几何群论。

低维拓扑的研究方向 二维与三维

- **二维** 映射类群、Teichmüller 空间与模空间，联系几何群论。
- **三维几何与基本群** 双曲几何、有限覆叠与基本群。Agol '13 证明 virtual Haken 与 virtual fibering 定理。后者指出，闭双曲三维流形都有纤维化于 S^1 的有限覆叠。

低维拓扑的研究方向 二维与三维

- **二维** 映射类群、Teichmüller 空间与模空间，联系几何群论。
- **三维几何与基本群** 双曲几何、有限覆叠与基本群。Agol '13 证明 virtual Haken 与 virtual fibering 定理。后者指出，闭双曲三维流形都有纤维化于 S^1 的有限覆叠。
- **Floer 同调** 利用几何 PDE 的解空间构造同调，把三维流形视为四维流形的边界，研究纽结手术、四维配边与拓扑量子场论 (TQFT)。

低维拓扑的研究方向 二维与三维

- **二维** 映射类群、Teichmüller 空间与模空间，联系几何群论。
- **三维几何与基本群** 双曲几何、有限覆叠与基本群。Agol '13 证明 virtual Haken 与 virtual fibering 定理。后者指出，闭双曲三维流形都有纤维化于 S^1 的有限覆叠。
- **Floer 同调** 利用几何 PDE 的解空间构造同调，把三维流形视为四维流形的边界，研究纽结手术、四维配边与拓扑量子场论 (TQFT)。
- **纽结与量子拓扑** Alexander、Jones 多项式及其范畴化，如纽结 Floer 同调、Khovanov 同调。

低维拓扑的研究方向 二维与三维

- **二维** 映射类群、Teichmüller 空间与模空间，联系几何群论。
- **三维几何与基本群** 双曲几何、有限覆叠与基本群。Agol '13 证明 virtual Haken 与 virtual fibering 定理。后者指出，闭双曲三维流形都有纤维化于 S^1 的有限覆叠。
- **Floer 同调** 利用几何 PDE 的解空间构造同调，把三维流形视为四维流形的边界，研究纽结手术、四维配边与拓扑量子场论 (TQFT)。
- **纽结与量子拓扑** Alexander、Jones 多项式及其范畴化，如纽结 Floer 同调、Khovanov 同调。
- **切触几何** 切触结构、Reeb 动力系统及辛填充。

研究方向详见 floer.wiki/research

低维拓扑的研究方向 四维

- **几何分析** 四维 Ricci flow、奇点与 Einstein 度量。Bamler '22 提出通过 Ricci flow 研究 $11/8$ 猜想。

低维拓扑的研究方向 四维

- **几何分析** 四维 Ricci flow、奇点与 Einstein 度量。Bamler '22 提出通过 Ricci flow 研究 11/8 猜想。
- **规范场论与量子拓扑** Donaldson、Seiberg–Witten、Bauer–Furuta、Heegaard Floer 不变量，以及 skein lasagna modules。

低维拓扑的研究方向 四维

- **几何分析** 四维 Ricci flow、奇点与 Einstein 度量。Bamler '22 提出通过 Ricci flow 研究 11/8 猜想。
- **规范场论与量子拓扑** Donaldson、Seiberg–Witten、Bauer–Furuta、Heegaard Floer 不变量，以及 skein lasagna modules。
- **Kirby 图与分解** 把手分解 (Kirby、Akbulut、Gompf)、三分解 (trisection, Gay–Kirby)，四维流形中的嵌入曲面 (Lisa Piccirillo、Maggie Miller)。

低维拓扑的研究方向 四维

- **几何分析** 四维 Ricci flow、奇点与 Einstein 度量。Bamler '22 提出通过 Ricci flow 研究 11/8 猜想。
- **规范场论与量子拓扑** Donaldson、Seiberg–Witten、Bauer–Furuta、Heegaard Floer 不变量，以及 skein lasagna modules。
- **Kirby 图与分解** 把手分解 (Kirby、Akbulut、Gompf)、三分解 (trisection, Gay–Kirby)，四维流形中的嵌入曲面 (Lisa Piccirillo、Maggie Miller)。
- **辛几何与复几何** 辛四维流形、Lefschetz 纤维化与复曲面。

研究方向详见 floer.wiki/research

课程技能树与入门文献

基础

数学分析

高等代数

几何学

中阶

拓扑学

抽象代数

复变函数

进阶

微分流形

同调论

Morse 同调

- **Morse 理论** Milnor, *Morse Theory*.
Audin–Damian, *Morse Theory and Floer Homology*, 第一部分。
Kronheimer–Mrowka, *Monopoles and Three-Manifolds*, §2。
- **低维流形** Martelli, *An Introduction to Geometric Topology*;
Gompf–Stipsicz, *4-Manifolds and Kirby Calculus*。
- **纽结入门** Ozsváth–Stipsicz–Szabó, *Grid Homology for Knots and Links*, 第 2 章。
Rasmussen, *Knots, Polynomials, and Categorification*, 第 1–2 章。

课程与完整书目 floer.wiki/more/courses

Kirby 问题清单 K3

Baykur、Kirby、Ruberman 主编，2026 年出版，约 400 个问题。

K1 1978 源于 1976 年 Stanford 会议，K2 1997 汇总问题与进展。

K3 与 K2 并不完全重合。K3 以新问题为主，选录并更新部分旧问题，并未收录 K2 的全部问题。

Kirby 问题清单 K3

Baykur、Kirby、Ruberman 主编，2026 年出版，约 400 个问题。

K1 1978 源于 1976 年 Stanford 会议，K2 1997 汇总问题与进展。

K3 与 K2 并不完全重合。K3 以新问题为主，选录并更新部分旧问题，并未收录 K2 的全部问题。

准备 邮件至 flyye@math.pku.edu.cn，说明年级、已学内容与兴趣，商议后从 K3 选择合适问题，正式加入实验室。

开展 阅读背景与进展，计算特殊例子。将安排每周一小时的统一答疑，建议平均每四周汇报进展和提出问题。

目标 写出完整综述，向本科同学讲清问题。不要求原创，有余力可研究 K3 问题中的特殊情形。

科研流程与联系 floer.wiki/join

谢谢！

Floer 同调实验室

floer.wiki

