

几何学 I 第十讲

叶帆*

2026 年 10 月 21 日

10 正交变换

第九讲通过正交换轴消去二次项的交叉项，但所用的换轴矩阵还要求出。本讲先说明正交矩阵为何表示标准正交基之间的转换，再从实对称矩阵的特征向量构造它。特征值与特征向量对应尤承业《解析几何》第 4 章第 3 节 3.3 “仿射变换的不动点和特征向量”的相关内容；三维实对称矩阵的正交对角化在这里给出证明，一般有限维结论属于《高等代数》。以下沿用第三、四讲的基、内积、投影及行列式。

10.1 正交变换与垂直分解

回忆第三讲关于内积与长度的定义，在 $\mathbb{R}^3$ 的标准坐标下有

$$u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = u^T v, \|u\| = \sqrt{u \cdot u}.$$

内积为零的两个向量称为正交。线性映射满足加法与数乘的保持条件，其矩阵的各列是标准基向量的像。

定义 10.1 (正交变换, orthogonal transformation). 设 n 为正整数。保持标准内积的线性映射 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 称为**正交变换**。其 $n \times n$ 实矩阵 Q 满足

$$(Qu) \cdot (Qv) = u \cdot v \text{ 对所有 } u, v \in \mathbb{R}^n,$$

等价地, $Q^T Q = I$, 其中 I 为 n 阶单位矩阵。满足这个条件的矩阵称为**正交矩阵**。

因为 $(Qu) \cdot (Qv) = u^T Q^T Q v$, 取 $u = e_i, v = e_j$ 便逐项得到上述矩阵条件。若将 Q 的列写为 $q_1, \dots, q_n$, 则 $Q^T Q$ 的第 i, j 项为 $q_i \cdot q_j$ 。所以矩阵条件恰好要求各列长度为 1、不同列互相正交。这 n 列组成 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基, 故 Q 可逆, 且 $Q^{-1} = Q^T$ 。沿用行列式的乘法公式与转置不改变行列式的性质, 得到 $(\det Q)^2 = 1$, 因而 $\det Q = \pm 1$ 。在三维中, 正号保持第四讲的定向, 负号反转定向。

取 $u = v$ 可知正交变换保持长度; 对非零向量, 代入 $\cos \theta = (u \cdot v) / (\|u\| \|v\|)$ 可知它保持夹角。线性性又给出 $Q(y - x) = Qy - Qx$, 所以它保持距离, 并且 $Q0 = 0$ 。

回忆第八、九讲的正交换轴, 保持原点不变, 在旧标准正交基下将新基向量排成 Q 的各列, 则同一点的新旧坐标满足 $x = Qy$ 。这里 Q 描述换基; 将 $v \mapsto Qv$ 看作自由向量的变换时, 它是正交变换。

例子 10.2 (旋转与反射的正交矩阵). 下列两个矩阵均为正交矩阵, 且保持第三坐标不变,

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*本讲义由讲师通过与 Codex GPT-6 的讨论生成。

它们的各列两两正交、长度均为 1, 且 $\det R_\theta = 1, \det S_\alpha = -1$ 。对 $x = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, x_3)$, 和角公式给出

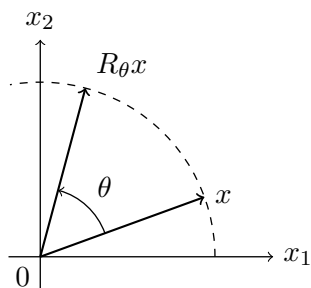
$$R_\theta x = (r \cos(\varphi + \theta), r \sin(\varphi + \theta), x_3).$$

因此 R_θ 表示绕第三坐标轴旋转 θ 。对于 S_α , 令

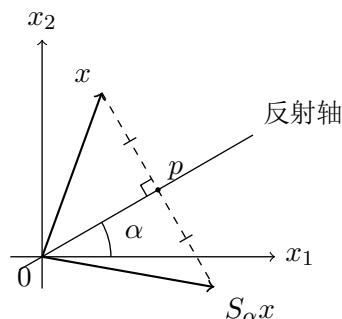
$$u = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0), v = (-\sin \alpha, \cos \alpha, 0).$$

直接计算得到 $S_\alpha u = u, S_\alpha v = -v$ 及 $S_\alpha e_3 = e_3$ 。所以 S_α 固定由 u, e_3 张成的平面, 将垂直于该平面的分量取负, 即关于该平面的反射。在 $x_3 = 0$ 的平面内, 它是关于直线 $\mathbb{R}u$ 的反射。

反过来, 任一二维正交矩阵的第一列是单位向量, 可写为 $(\cos \theta, \sin \theta)^\top$ 。与它正交的单位向量只有 $\pm(-\sin \theta, \cos \theta)^\top$, 故第二列只能取这两者之一。取正号时得到 R_θ 的左上 2×2 块; 取负号并令 $\theta = 2\alpha$ 时, 得到 S_α 的左上 2×2 块。因此平面正交变换恰为绕原点的旋转或关于过原点直线的反射。下图均在 $x_3 = 0$ 的平面内绘制。



旋转保持长度, 将方向转过角度 θ 。



反射轴方向为 $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ 。
垂足 p 到 x 与 $S_\alpha x$ 等距。

回到第九讲的换轴, 对二次表达式 $ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$, 其中 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 代入 $x = R_\theta y$ 后, 交叉项系数为 $(c - a) \sin 2\theta + 2b \cos 2\theta$ 。选取 $(a - c) \sin 2\theta = 2b \cos 2\theta$ 即可消去它。例如 $a = c$ 且 $b \neq 0$ 时可取 $\theta = \pi/4$, 得到的正是平方和与平方差的换轴。这里用 R_θ 描述新旧坐标的关系; 同一矩阵作为点的变换时才表示图形的旋转。

回忆第三讲关于正交投影的结论。以下 V 为实内积空间; 在本讲中取 $V = \mathbb{R}^3, \langle u, v \rangle = u \cdot v$ 。

性质 10.3 (正交分解与投影, orthogonal decomposition and projection). 固定 $e \neq 0$, 每个向量 v 唯一分解为 $v = P_e v + P_e^\perp v$, 其中 $P_e v \in \mathbb{R}e$ 且 $P_e^\perp v \perp e$ 。具体为

$$P_e v = \frac{\langle v, e \rangle}{\langle e, e \rangle} e, P_e^\perp v = v - P_e v.$$

映射 P_e 称为到直线 $\mathbb{R}e$ 的**正交投影**。记 $P_e^\perp = \text{id}_V - P_e$, 它给出垂直分量。两个映射均线性。

证明. 公式给出 $P_e v \in \mathbb{R}e$ 及 $\langle v - P_e v, e \rangle = 0$ 。若还有另一分解, 两次平行分量之差既属于 $\mathbb{R}e$ 又正交于 e ; 由 $\langle e, e \rangle > 0$, 此差为零。线性由公式和内积的双线性得到。□

定义 10.4 (垂直平面). 设 $n \in \mathbb{R}^3$ 为单位向量, 记

$$n^\perp = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid n \cdot v = 0\}.$$

它是过原点、法向量为 n 的平面, 也称直线 $\mathbb{R}n = \{tn \mid t \in \mathbb{R}\}$ 的**正交补** (orthogonal complement)。

性质 10.5 (轴向与垂直平面的分解). 每个 $x \in \mathbb{R}^3$ 唯一写为 $x = tn + w$, 其中 $t \in \mathbb{R}$, $w \in n^\perp$, 且

$$t = x \cdot n, \quad w = x - (x \cdot n)n.$$

证明. 回忆第三讲的正交投影

$$P_n x = \frac{x \cdot n}{n \cdot n} n, \quad P_n^\perp x = x - P_n x.$$

因为 n 为单位向量, $n \cdot n = 1$, 所以 $P_n x = (x \cdot n)n$ 在直线 $\mathbb{R}n$ 上. 另一个分量满足

$$n \cdot P_n^\perp x = n \cdot x - (x \cdot n)(n \cdot n) = 0,$$

故在平面 $n^\perp$ 内. 取 $t = x \cdot n$, $w = P_n^\perp x$ 便得到所需分解.

若还有 $x = t'n + w'$, 其中 $w' \perp n$, 相减得到 $(t - t')n = w' - w$. 右边与 n 正交, 左边与 n 作内积为 $t - t'$, 所以 $t = t'$, 进而 $w = w'$. 这证明唯一性. $\square$

平面内也可具体选取标准正交基. 取一个不与 n 平行的向量 u , 令

$$u' = \frac{u - (u \cdot n)n}{\|u - (u \cdot n)n\|}, \quad v = n \times u', \quad v' = \frac{v}{\|v\|}.$$

由第四讲的叉积性质, v 与 n, u' 正交, 且 $\|v\| = \|n\| \|u'\| = 1$, 因此归一化后 $v' = v$. 向量 n, u', v' 两两正交且都是单位向量, 其混合积非零, 故构成 $\mathbb{R}^3$ 的一组基. 因此 $n^\perp$ 内的任意向量都唯一写成 $su' + tv'$.

例子 10.6 (过原点的反射). 对单位向量 n , 令 $Qx = x - 2(n \cdot x)n$. 若 $x = tn + w$ 且 $w \perp n$, 则 $Qx = -tn + w$, 即保留平面分量、将法向分量取负. 对另一个向量 $y = t'n + w'$, 其中 $w' \perp n$, 有

$$(Qx) \cdot (Qy) = tt' + w \cdot w' = x \cdot y,$$

所以 $Q = I - 2nn^\top$ 正交, 连续作用两次得到 $Q^2 = I$. 在基 (n, u', v') 中, 它的矩阵为 $\text{diag}(-1, 1, 1)$, 故 $\det Q = -1$. 例如 $n = e_3$ 时, $Q(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, -x_3)$.

10.2 实对称矩阵与正交对角化

实对称矩阵的正交对角化对任意 $n \times n$ 实对称矩阵都成立. 下面先给出一般 n 维中的特征值与特征向量定义, 为便于计算与几何解释, 本节只证明 $n = 3$ 的正交对角化结论. 一般情形将在《高等代数》中证明. 若能找到一组基, 使 A 把每个基向量都映为它自身的倍数, 那么 A 在这组基下只需分别乘以三个数. 我们先定义这样的向量, 再说明对称性为何允许将它们选成标准正交基.

定义 10.7 (特征值与特征向量). 设 A 为 $n \times n$ 实矩阵. 若 $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$ 且 $Av = \lambda v$, 称实数 λ 为 A 的**特征值** (eigenvalue), v 为相应的**特征向量** (eigenvector).

以下取 $n = 3$. 条件 $Av = \lambda v$ 等价于 $(A - \lambda I)v = 0$. 这里使用行列式判据, 方阵的行列式为零当且仅当它的列向量线性相关, 因而相应齐次线性方程有非零解; 三维中这也可由第四讲混合积为零的几何意义理解. 因此所需条件为 $\det(A - \lambda I) = 0$. 左边是关于 λ 的三次实多项式, 称为 A 的**特征多项式**. 求出一个实根后, 将它代回方程并消元, 便能求出相应特征向量.

一般三次实多项式只保证至少有一个实根, 并不保证三个根全为实数. 例如 $\lambda(\lambda^2 + 1)$ 只有一个实根 0. 下面的对称性论证才能保证实对称矩阵具有三个实特征值, 其中允许重复; 一个根出现几次, 就按相应次数计入.

回忆实对称矩阵的条件为 $A^T = A$ 。由于 $u^T A^T v = u^T A v$ ，对所有 $u, v \in \mathbb{R}^3$ 有

$$(Au) \cdot v = u \cdot (Av).$$

反过来，依次取 $u = e_i, v = e_j$ 也能由此式得到 $A^T = A$ 。若 $Au = \lambda u, Av = \mu v$ ，则上式给出 $(\lambda - \mu)(u \cdot v) = 0$ 。因此，对实对称矩阵，不同特征值的特征向量自动正交。同一个特征值的两个特征向量则未必正交，需要在它们的线性组合中重新选择。

定理 10.8 (实对称矩阵的正交对角化). 若 A 是 3×3 实对称矩阵，则存在一组两两正交的单位特征向量。取它们为矩阵 Q 的三列，得到

$$Q^T Q = I, Q^T A Q = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

记 $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ ，意思是主对角线为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 、其余项均为零。等式 $AQ = QD$ 逐列表示 $Aq_i = \lambda_i q_i$ 。因此在坐标 $x = Qy$ 中，线性映射 A 将 y_i 变为 $\lambda_i y_i$ ，二次表达式则变为 $x^T A x = \sum_i \lambda_i y_i^2$ 。这样的 $Q^T A Q = D$ 称为正交对角化 (orthogonal diagonalization)。

证明. 三次实多项式在充分大的正数和负数处符号相反，由介值定理有实根。因此可取单位特征向量 n ，满足 $An = \lambda_1 n$ 。若 $w \perp n$ ，则

$$(Aw) \cdot n = w \cdot (An) = \lambda_1 w \cdot n = 0.$$

故 A 将平面 $n^\perp$ 中的向量仍映到这个平面中。

按上一节的方法在该平面内任取一组标准正交基。因为 A 在该平面上仍满足 $(Ax) \cdot y = x \cdot (Ay)$ ，它在这组基下的矩阵是实对称矩阵。将矩阵写成

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

其特征方程为 $(a - \lambda)(c - \lambda) - b^2 = 0$ ，判别式为 $(a - c)^2 + 4b^2 \geq 0$ 。因此可在该平面内选取单位特征向量 u' ，记 $Au' = \lambda_2 u'$ 。

令 $v = n \times u'$ ，并记其归一化为 $v' = v/\|v\|$ 。同前， $\|v\| = 1$ ，所以 $v' = n \times u'$ ，且 n, u', v' 两两正交。又有

$$(Av') \cdot n = v' \cdot (An) = 0, (Av') \cdot u' = v' \cdot (Au') = 0.$$

将 Av' 在基 (n, u', v') 中展开，前两个系数为零，所以 $Av' = \lambda_3 v'$ 。取 $Q = [n \ u' \ v']$ ，便有 $AQ = Q \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ ，左乘 Q^T 即得结论。□

《高等代数》中的实对称矩阵正交对角化定理告诉我们，上述结论对任意阶实对称矩阵都成立，即对每个 $n \times n$ 实对称矩阵 A ，都存在 $n \times n$ 正交矩阵 Q ，使 $Q^T A Q$ 为实对角矩阵。

实际计算时，先求特征值，再分别解 $(A - \lambda I)v = 0$ 。不同特征值的解已经互相正交，只需归一化。若同一特征值的解中选出了两个线性无关的向量 u, v ，令

$$u' = \frac{u}{\|u\|}, v' = \frac{v - (v \cdot u')u'}{\|v - (v \cdot u')u'\|}.$$

线性性保证这个差仍满足原方程，线性无关保证它非零。如需第三个向量，减去它在已选两个正交方向上的投影后再归一化。这正是上一节垂直分解的用法。

任意实矩阵并不都能正交对角化。事实上，若 $Q^T A Q = D$ 且 D 为实对角矩阵，则 $A = Q D Q^T$ 必为对称矩阵。例如 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 不对称，不能正交对角化。

10.3 正交对角化的计算

例子 10.9 (重特征值与正交基). 设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

先计算特征多项式, 按第一行展开得

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (2 - \lambda)^3 - 3(2 - \lambda) + 2 \\ &= (4 - \lambda)(1 - \lambda)^2. \end{aligned}$$

因此特征值为 4, 1, 1。对 $\lambda = 4$, 方程 $(A - 4I)x = 0$ 为

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

前两式相减得 $x_1 = x_2$, 再代回得 $x_3 = x_1$ 。所以全部解为 $t(1, 1, 1)$, 归一化后取

$$n = \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}}.$$

对 $\lambda = 1$, 矩阵 $A - I$ 的每个元素均为 1, 因此 $(A - I)x = 0$ 等价于 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ 。从其解中取两个线性无关的向量

$$u = (1, -1, 0), \quad v = (1, 0, -1).$$

它们的内积为 1, 不能仅分别归一化。先令 $u' = u/\|u\|$, 再从 v 中减去沿 u' 的投影, 得到

$$u' = \frac{(1, -1, 0)}{\sqrt{2}}, \quad v - (v \cdot u')u' = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right).$$

将后一个向量归一化, 得到 $v' = (1, 1, -2)/\sqrt{6}$ 。因此

$$An = 4n, \quad Au' = u', \quad Av' = v', \quad Q = [n \ u' \ v'],$$

且 n, u', v' 两两正交、长度均为 1, 故

$$Q^T Q = I, \quad Q^T A Q = \text{diag}(4, 1, 1).$$

重特征值的正交特征基并不唯一。例如将平面内的基 (u', v') 换为

$$(\cos \theta u' + \sin \theta v', -\sin \theta u' + \cos \theta v'),$$

仍得到相同的对角矩阵。在坐标 $x = Qy$ 中,

$$x^T A x = 4y_1^2 + y_2^2 + y_3^2.$$

故 $x^T A x = 4$ 表示以 n 为短轴方向的椭球面, 三个半轴长为 1, 2, 2。特征值的重复对应于垂直平面内两个半轴长相同。

例子 10.10 (对称与正交的区别). 矩阵 $\text{diag}(2, 1, 1)$ 是对称矩阵, 但它将 e_1 的长度变为 2, 因而不正交。反过来, 绕第三轴旋转 $\pi/2$ 的矩阵

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

满足 $Q^T Q = I$, 却不对称。它在前两个坐标方向张成的平面内没有实特征向量, 因此不能在实数范围内对角化。实对称矩阵 A 可用正交矩阵换基化为对角矩阵, 并不表示 A 本身是正交矩阵。

至此, 第九讲的换轴、配方与分类都有了依据。正交变换描述保持内积的线性映射; 下一讲允许原点移动, 从点之间的距离出发确定整个变换。

课后例题

1. 设

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

计算特征多项式及全部特征值, 求一组两两正交的单位特征向量, 并写出相应的正交矩阵 Q 和对角矩阵 $D = Q^T A Q$ 。再作换轴 $x = Qy$, 将二次曲面 $x^T A x = 4$ 化为标准方程, 并求三个半轴长。

2. 设

$$q(x) = x^T A x + b \cdot x + c, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = (2, 0, 4)^T, \quad c = -3.$$

计算特征多项式和特征值, 求一组标准正交特征基, 令其列组成矩阵 Q , 使 $Q^T A Q$ 为对角矩阵。随后作换轴 $x = Qy$, 计算 $Q^T b$ 及 $q(Qy)$, 并完成平方。

几何学 I 第十一讲

叶帆*

2026 年 10 月 23 日

11 保距变换

本讲对应尤承业《解析几何》第 4 章第 1 节中保距变换、第 3 节中保距变换公式的相关内容，并在三维中展开计算。上一讲的正交变换保持内积并固定原点。本讲从保持点与点之间的距离出发，求出变换的形式，再计算旋转与反射的例子。

11.1 由距离恢复正交部分

回忆第三讲关于距离的定义，标准坐标下两点 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 的欧氏距离为

$$d(x, y) = \|y - x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}.$$

定义 11.1 (保距变换, isometry). 双射 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 若对所有 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 满足

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y),$$

称为保距变换，也称等距变换。

这里的双射要求每个点恰有一个原像。第十讲的正交变换满足定义，平移也满足，因为 $(y + b) - (x + b) = y - x$ 。保距条件本身没有要求线性；下面先把原点的移动分离出来，再用距离求出剩余部分。

引理 11.2 (极化公式, polarization identity). 回忆内积的双线性与对称性， $\|u\|^2 = u \cdot u$ 。实内积空间的极化公式常写成

$$u \cdot v = \frac{\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2}{4}.$$

等价地，标准内积可由长度及差向量的长度恢复，

$$u \cdot v = \frac{\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u - v\|^2}{2}.$$

证明. 展开 $\|u - v\|^2 = (u - v) \cdot (u - v) = \|u\|^2 - 2u \cdot v + \|v\|^2$ ，移项即得第二式。另有 $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2u \cdot v + \|v\|^2$ ，两式相减给出第一式。这也是第三讲余弦公式的代数形式。□

定理 11.3 (保距变换的形式). 设 n 为正整数。映射 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 保持标准欧氏距离，当且仅当 $f(x) = Qx + b$ ，其中 Q 为 $n \times n$ 正交矩阵，即 $Q^T Q = I$ ，且 $b \in \mathbb{R}^n$ 。这样的映射自动为双射。

*本讲义由讲师通过与 Codex GPT-6 的讨论生成。

证明. 先设 f 保持距离, 令 $b = f(0)$ 、 $h(x) = f(x) - b$ 。于是 $h(0) = 0$, 且

$$\|h(x)\| = \|x\|, \|h(x) - h(y)\| = \|x - y\|.$$

将这些等式代入极化公式, 得到 $h(x) \cdot h(y) = x \cdot y$ 。此时尚未知道 h 线性, 不能直接把 $h(x)$ 写为基向量像的线性组合。

令 $e_1, \dots, e_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的标准基, $q_i = h(e_i)$, $1 \leq i \leq n$ 。则 $q_i \cdot q_j = e_i \cdot e_j$, 所以这 n 个向量两两正交且长度为 1。若 $\sum_{i=1}^n c_i q_i = 0$, 与 q_j 作内积即得 $c_j = 0$, 所以它们线性无关, 组成 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基。

回忆第三讲的基与内积, 任意向量 $w \in \mathbb{R}^n$ 都可唯一写成

$$w = \sum_{i=1}^n a_i q_i.$$

两边与 q_j 作内积, 利用 $q_j \cdot q_j = 1$ 及 $i \neq j$ 时 $q_i \cdot q_j = 0$, 得到

$$w \cdot q_j = \sum_{i=1}^n a_i (q_i \cdot q_j) = a_j.$$

因此 $w = \sum_{i=1}^n (w \cdot q_i) q_i$ 。取 $w = h(x)$, 便有

$$h(x) = \sum_{i=1}^n (h(x) \cdot q_i) q_i.$$

这一步只把 $h(x)$ 作为一个向量作基展开, 并未使用 h 的线性性。再利用前面已经证明的内积保持性及 $q_i = h(e_i)$, 得到

$$h(x) \cdot q_i = h(x) \cdot h(e_i) = x \cdot e_i = x_i,$$

所以 $h(x) = \sum_{i=1}^n x_i q_i$ 。取 $Q = [q_1 \cdots q_n]$, 便有 $h(x) = Qx$ 及 $Q^T Q = I$ 。这一步从保持距离推出了线性部分。

反过来, 若 $Q^T Q = I$, 则 $Q^{-1} = Q^T$, 故

$$f^{-1}(y) = Q^T(y - b) = Q^T y - Q^T b.$$

并且

$$\|f(y) - f(x)\|^2 = (y - x)^T Q^T Q (y - x) = \|y - x\|^2.$$

两边开平方, 得到保距性。 □

对于已知保距的 f , 先取 $b = f(0)$, 再取 $q_i = f(e_i) - f(0)$ 为 Q 的第 i 列, 便得到其唯一的矩阵表达式。这里的 q_i 是两点之差, 不能直接取 $f(e_i)$ 。若已知 $f(x) = Qx + b$, 检查这些列是否为标准正交基即可判定保距性。取 $n = 2$ 或 3 , 分别得到平面与空间中的结论。以下计算以这两种情形为主。

例子 11.4 (由四个点的像恢复保距变换). 求满足下列条件的保距变换 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} f(0) &= (1, -1, 2), & f(e_1) &= (1, 0, 2), \\ f(e_2) &= (0, -1, 2), & f(e_3) &= (1, -1, 3). \end{aligned}$$

先取 $b = f(0)$, 再计算差向量

$$q_1 = (0, 1, 0), \quad q_2 = (-1, 0, 0), \quad q_3 = (0, 0, 1).$$

这三个向量组成标准正交基。因此

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, f(x) = (1 - x_2, x_1 - 1, x_3 + 2)$$

确实保距并满足四个条件。任意其他满足条件的保距变换都有相同的 b 和 q_i ，故与 f 相同。其逆由坐标反解为

$$f^{-1}(y) = (y_2 + 1, 1 - y_1, y_3 - 2).$$

若仅将条件中的 $f(e_3)$ 改为 $(1, -1, 4)$ ，其与 $f(0)$ 的距离为 2，而 $\|e_3\| = 1$ ，于是不存在满足新条件的保距变换。四个点的像既决定候选公式，也必须满足相应的距离条件。

11.2 平移、旋转与反射

记 $L_Q(x) = Qx$ ，则保距变换 $f(x) = Qx + b$ 可写成 $f = T_b \circ L_Q$ ，即先作固定原点的正交变换，再作平移。在三维空间中，正交部分可按 $\det Q = 1$ 或 -1 区分，分别写成旋转，或旋转与过原点平面反射的复合。再用平移改变旋转轴与反射平面的位置，便得到不过原点的相应变换。

定义 11.5 (平移, translation). 给定自由向量 b ，映射 $T_b(x) = x + b$ 称为**平移**。由 $T_b(y) - T_b(x) = y - x$ ，它保持距离。

性质 11.6 (保距变换的复合与逆). 对 $f(x) = Qx + b$ 和 $g(x) = Rx + c$ ，其中 $b, c \in \mathbb{R}^3$ ，有

$$(f \circ g)(x) = QRx + Qc + b,$$

$$f^{-1}(y) = Q^T(y - b) = Q^T y - Q^T b.$$

因此保距变换对复合与取逆封闭，并唯一写成 $f = T_b \circ L_Q$ 。

公式由直接代入得到； QR 和 Q^T 均正交。唯一性来自 $b = f(0)$ 以及 $Qx = f(x) - f(0)$ 。

第十讲已经给出绕第三坐标轴旋转的矩阵。对任意单位向量 $e \in \mathbb{R}^3$ ，将 v 分成轴向分量 $(e \cdot v)e$ 和垂直分量 $v - (e \cdot v)e$ 。固定前一部分，在 $e^\perp$ 内旋转 θ ，得到绕轴 $\mathbb{R}e$ 的**旋转**

$$R_{e,\theta}v = (e \cdot v)e + \cos \theta(v - (e \cdot v)e) + \sin \theta(e \times v).$$

角度的正方向由平面的有序基 $(u, e \times u)$ 确定，其中 $u \in e^\perp$ 是任一单位向量。若 $v = te + su + r(e \times u)$ ，则 $e \times (e \times u) = -u$ 给出

$$R_{e,\theta}v = te + (s \cos \theta - r \sin \theta)u + (s \sin \theta + r \cos \theta)(e \times u).$$

因此，在标准正交基 $(u, e \times u, e)$ 中，它的矩阵为

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

这证明 $R_{e,\theta}$ 保持内积，且其矩阵的行列式为 1。向量 e 与 $-e$ 确定同一条轴，但相应的正角方向相反。

定义 11.7 (过原点平面的反射). 设 $n \in \mathbb{R}^3$ 为单位向量， $H = n^\perp$ 。关于 H 的**反射**为

$$S_H(v) = v - 2(n \cdot v)n.$$

若 $v = tn + w$ 且 $w \perp n$, 则 $S_H(v) = -tn + w$ 。它固定平面 H 内的每个向量, 将法向分量取负。由第十讲关于反射的计算, S_H 在标准基下的矩阵为 $I - 2nn^T$, 它是行列式为 -1 的正交矩阵, 且 $S_H^2 = \text{id}$ 。

性质 11.8 (空间正交变换的形式). 设 Q 为 3×3 正交矩阵。

- (1) 若 $\det Q = 1$, 则存在单位向量 e 和角度 θ , 使 $L_Q = R_{e,\theta}$ 。
- (2) 若 $\det Q = -1$, 则存在单位向量 e 和角度 θ , 使 $L_Q = R_{e,\theta}S_{e^\perp}$ 。

第二种情形中, 旋转与反射的复合次序可以交换。

证明. 先设 $\det Q = 1$ 。由 $(Q - I)Q^T = I - Q^T$, 得到

$$\det(Q - I) = \det(I - Q^T) = -\det(Q - I).$$

故 $\det(Q - I) = 0$, 方程 $(Q - I)e = 0$ 有非零解, 将其归一化可令 $\|e\| = 1$, 于是 $Qe = e$ 。

若 $v \perp e$, 则 $Qv \cdot e = Qv \cdot Qe = v \cdot e = 0$, 故 Qv 仍在 $e^\perp$ 内。在标准正交基 $(u, e \times u, e)$ 中, L_Q 的矩阵为

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

左上角的 2×2 矩阵正交, 且行列式为 1。由第十讲例子 10.2 中的二维分类, 它为某个平面旋转矩阵。因此 L_Q 固定轴向分量, 并将垂直平面旋转 θ , 即 $L_Q = R_{e,\theta}$ 。

再设 $\det Q = -1$ 。此时 $-Q$ 正交且 $\det(-Q) = 1$, 由第一种情形, 存在单位向量 e 使 $(-Q)e = e$, 即 $Qe = -e$ 。令 $H = e^\perp$, 则 $S_H(e) = -e$, 所以 $(L_Q S_H)(e) = e$ 。复合 $L_Q S_H$ 保持内积, 其矩阵的行列式为 1。由上一段在标准正交基 $(u, e \times u, e)$ 中的计算, $L_Q S_H = R_{e,\theta}$, 从而

$$L_Q = R_{e,\theta}S_H.$$

旋转保持轴向分量并旋转垂直分量, 反射只将轴向分量取负, 故两者可以交换。 $\square$

行列式为 -1 并不保证 L_Q 就是平面反射。例如 $Q = -I$ 时, L_Q 只固定原点, 而平面反射固定一个平面。它在上述第二种形式中对应 $\theta = \pi$; 纯平面反射则对应 $\theta = 0$ 。

例子 11.9 (绕轴旋转 π)。取 $e = (1, 1, 0)/\sqrt{2}$ 。对 $v = (v_1, v_2, v_3)$, 有

$$R_{e,\pi}v = 2(e \cdot v)e - v, \quad R_{e,\pi}(v_1, v_2, v_3) = (v_2, v_1, -v_3).$$

因为 $2(e \cdot v)e = (v_1 + v_2, v_1 + v_2, 0)$, 减去 v 便得到上式。轴为 $\mathbb{R}(1, 1, 0)$, 其正交补上的作用为 $-I$; 例如 $(1, -1, 0)$ 变为 $(-1, 1, 0)$ 。在轴向与两个垂直方向组成的基中, 三个倍率为 $1, -1, -1$, 所以行列式为 1。

例子 11.10 (旋转中心与旋转轴的平移)。设 R 为绕原点的平面旋转, 给定点 $o \in \mathbb{R}^2$, 令

$$f = T_o \circ R \circ T_{-o}, \quad f(x) = o + R(x - o).$$

对任意 $y \in \mathbb{R}^2$, 有 $f(o + y) - o = Ry$ 。因此, 以 o 为起点的向量 y 变为 Ry , 而 o 保持不动, 故 f 是以 o 为中心、转角与 R 相同的旋转。

在空间中, 给定单位向量 e 和点 $o \in \mathbb{R}^3$, 同样令

$$f(x) = o + R_{e,\theta}(x - o).$$

将 $x - o$ 写为 $te + w$, 其中 $w \perp e$, 则

$$f(o + te + w) = o + te + R_{e,\theta}w.$$

所以 f 保持轴向分量, 并将垂直分量旋转 θ , 即绕直线 $o + \mathbb{R}e$ 的旋转。特别地, 对每个 $t \in \mathbb{R}$, 均有 $f(o + te) = o + te$, 轴上的每个点都保持不动。

定义 11.11 (关于平面的反射, reflection). 设 $n \in \mathbb{R}^3$ 为单位向量, $H = o + n^\perp$ 。关于平面 H 的反射为

$$S_H = T_o \circ S_{n^\perp} \circ T_{-o}.$$

直接展开得到

$$S_H(x) = o + ((x - o) - 2(n \cdot (x - o))n) = x - 2(n \cdot (x - o))n.$$

因此它是三个保距变换的复合。将 $x - o$ 分解为 $tn + w$, 其中 $w \perp n$, 则 $S_H(x) = o - tn + w$ 。两点 x 与 $S_H(x)$ 的中点为 $o + w \in H$, 差向量平行于 n , 故上式确实表示关于 H 的反射。其不动点集恰为 H , 且 $S_H^2 = \text{id}$ 。

当 H 不过原点时, S_H 不再是线性映射。它的线性部分与平移部分由

$$S_H(x) = (I - 2nn^\top)x + 2(n \cdot o)n$$

给出。在平面内, 取 $n \in \mathbb{R}^2$ 为单位向量, 同样的公式定义关于直线 $H = o + n^\perp$ 的反射。

例子 11.12 (平面 $x_3 = 1$ 的反射). 取 $n = e_3$ 、 $o = (0, 0, 1)$, 则

$$S_H = T_o \circ S_{e_3^\perp} \circ T_{-o}, \quad S_H(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 2 - x_3).$$

点 $(1, 2, 3)$ 的像为 $(1, 2, -1)$, 中点 $(1, 2, 1)$ 在 H 内; 两点的差平行于 n 。等式 $S_H(x) = x$ 的条件为 $x_3 = 2 - x_3$, 即 $x_3 = 1$ 。

这里用互逆的两次平移改变旋转轴或反射平面的位置, 并不意味着任意平移与旋转的复合仍有不动点。一般保距变换仍应从 $f(x) = Qx + b$ 出发研究。若只要求保持直线上的分点参数, 不再要求保持距离, 下一讲将得到线性部分可以任意可逆的仿射变换。

课后例题

1. 令 $o = (1, -1, 2)$, R 为绕 e_3 轴旋转 $\pi/2$ 的正交变换, 定义

$$f(x) = o + R(x - o).$$

写出 R 及 f 的坐标公式, 并将 f 写成 $f(x) = Qx + b$ 。计算 $f(0), f(e_1), f(e_2), f(e_3)$, 说明直线 $o + \mathbb{R}e_3$ 上每一点在 f 下的像, 并直接由 $Q^\top Q = I$ 验证 f 保持距离。

2. 求关于平面 $H = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 2\}$ 的反射公式。计算 $S_H(0, 0, 1)$ 、 $S_H(2, 2, 1)$ 及 $S_H(2, 0, -1)$, 并验证 $S_H^2 = \text{id}$ 。说明前两点连线的中点位于 H , 且第三点被固定。

几何学 I 第十二讲

叶帆*

2026 年 10 月 28 日

12 仿射变换

本讲对应尤承业《解析几何》第 4 章第 1、2 节中仿射变换及其线性性质，以及第 3 节中不动点的相关内容。第十一讲从保持距离的条件推出 $Qx + b$ 的形式。本讲改为保持直线上的分点参数，再推导相应的矩阵形式。以下 $n = 2$ 或 3 ，分别表示平面或空间；坐标均写成列向量。

12.1 仿射变换的形式与性质

回忆第三讲的仿射坐标系，选取原点 o 和一组基 $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ ，便得到坐标系 $(o, \mathcal{E})$ 。点的坐标列 $(x_1, \dots, x_n)^T$ 表示 $o + \sum_i x_i e_i$ ，而两点坐标之差表示它们之间的自由向量。

对不同的两点 x, y 及实数 t ，点 $x + t(y - x)$ 在经过 x, y 的直线上，坐标可写为 $(1 - t)x + ty$ 。这种先取差向量再加入到点上的写法与坐标原点无关。 $0 \leq t \leq 1$ 给出线段， $t = 1/2$ 给出中点；也允许 $t < 0$ 或 $t > 1$ 。例如 $t = 2$ 时，所得点为 $2y - x$ ，它从 y 沿 x 到 y 的方向再前进同一位移。若 $x = y$ ，这个表达式对所有 t 都等于 x 。

定义 12.1 (仿射变换, affine transformation). 双射 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 若对任意 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 和 $t \in \mathbb{R}$ 满足

$$f((1 - t)x + ty) = (1 - t)f(x) + tf(y),$$

称为仿射变换。即它保持直线上的分点参数 t 。

这里要求同一个 t 同时描述原来的分点和它的像。例如，原线段的中点必须映到两个端点像的中点；当 $t = 2$ 时，等式要求 $f(2y - x) = 2f(y) - f(x)$ 。因此定义不仅要求像仍共线，还保留了沿这条直线的相对位置。

性质 12.2 (保距变换是仿射变换). 每个保距变换 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 都是仿射变换。

证明. 由第十一讲关于保距变换形式的定理, $f(x) = Qx + b$, 其中 Q 正交. 对任意 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 及 $t \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned} f((1 - t)x + ty) &= (1 - t)Qx + tQy + b \\ &= (1 - t)(Qx + b) + t(Qy + b) \\ &= (1 - t)f(x) + tf(y). \end{aligned}$$

又因为 f 是双射，所以它满足仿射变换的定义。□

*本讲义由讲师通过与 Codex GPT-6 的讨论生成。

回忆线性映射的两个条件为 $g(u+v) = g(u) + g(v)$ 及 $g(tu) = tg(u)$ 。在标准基中, $g(x) = \sum_i x_i g(e_i) = Ax$, 其中 A 的第 i 列为 $g(e_i)$ 。矩阵可逆是指存在矩阵 A^{-1} 满足 $AA^{-1} = A^{-1}A = I$; 此时 $x \mapsto Ax$ 为双射, 反之亦然。

定理 12.3 (仿射变换的形式). 映射 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为仿射变换, 当且仅当

$$f(x) = Ax + b,$$

其中 A 为可逆的 $n \times n$ 实矩阵, $b \in \mathbb{R}^n$ 。称 A 表示的线性映射为 f 的线性部分。

证明. 设 f 满足定义, 令 $b = f(0)$ 、 $g(x) = f(x) - b$ 。取定义中的第一个点为 0, 得到 $g(ty) = tg(y)$ 。再取 $t = 1/2$, 得到

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{g(x) + g(y)}{2}.$$

由已经得到的数乘条件, 左边等于 $g(x+y)/2$, 故 $g(x+y) = g(x) + g(y)$ 。于是 g 线性, 取 $A = [g(e_1) \cdots g(e_n)]$ 即有 $f(x) = Ax + b$ 。因 f 为双射, g 亦为双射, 所以 A 可逆。

反过来, 若 $f(x) = Ax + b$ 且 A 可逆, 则 $f^{-1}(y) = A^{-1}(y - b)$, 所以 f 为双射。直接代入有

$$\begin{aligned} f((1-t)x + ty) &= (1-t)Ax + tAy + b \\ &= (1-t)(Ax + b) + t(Ay + b), \end{aligned}$$

故满足定义。又由 $b = f(0)$ 和 $Ae_i = f(e_i) - f(0)$ 可知 A, b 唯一。 $\square$

推论 12.4 (差向量的变换). 对任意点 x, y 及自由向量 v , 有

$$f(y) - f(x) = A(y - x), \quad f(x + v) = f(x) + Av.$$

证明. 由 $(Ay + b) - (Ax + b) = A(y - x)$ 得到第一式, 取 $y = x + v$ 得到第二式。 $\square$

特别地, 取任意点 o , 有 $f(x) = f(o) + A(x - o)$ 。这与第三讲选取原点和基的过程相对应, 先取从 o 到 x 的差向量, 用 A 改变这个向量, 再从 $f(o)$ 出发。因此一个点的像和线性部分便确定了整个变换。

性质 12.5 (复合与逆). 若 $f(x) = Ax + b$ 、 $h(x) = Bx + c$, 则

$$(f \circ h)(x) = ABx + Ac + b, \quad f^{-1}(y) = A^{-1}(y - b).$$

证明. 前式由 $f(h(x)) = A(Bx + c) + b$ 得到, 后式由 $y = Ax + b$ 解出 x 得到。两式中的线性部分可逆, 所以仍是仿射变换。 $\square$

例如先沿第一轴伸长两倍, 再平移 $(1, 0)$, 得到 $(2x_1 + 1, x_2)$; 颠倒顺序得到 $(2x_1 + 2, x_2)$ 。复合时必须保留次序。

性质 12.6 (直线与平面的像). 仿射变换将直线映为直线, 将平面映为平面, 并保持平行关系。

证明. 直线 $x = x_0 + tu$ 中的 $u \neq 0$, 其像为 $f(x_0) + tAu$ 。由 A 可逆, $Au \neq 0$, 所以仍为直线。

平面 $x = x_0 + su + tv$ 的两个方向向量 u, v 线性无关, 其像为 $f(x_0) + sAu + tAv$ 。若 $\alpha Au + \beta Av = 0$, 左乘 A^{-1} 便有 $\alpha u + \beta v = 0$, 所以 $\alpha = \beta = 0$, 像仍为平面。平行直线的方向相同, 平行平面的两个方向可取相同的 u, v , 它们的像也分别如此; 单射性又保证不同的直线或平面不会变成同一个集合。 $\square$

例子 12.7 (仿射但不保距的变换). 映射 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 定义为

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, x_2, x_3).$$

其矩阵 $A = \text{diag}(2, 1, 1)$ 可逆, 故 f 是仿射变换。但

$$d(0, e_1) = 1, d(f(0), f(e_1)) = 2,$$

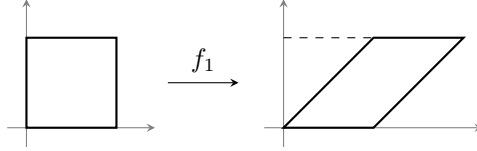
所以 f 不保距。

例子 12.8 (平移、伸缩与错切). 平移 $T_b(x) = x + b$ 的线性部分为 I 。以 o 为中心、倍率为 $c \neq 0$ 的伸缩为

$$f(x) = o + c(x - o) = cx + (1 - c)o.$$

$c = -1$ 时为关于 o 的中心对称。若沿不同坐标方向使用不同倍率, 例如 $(x_1, x_2) \mapsto (2x_1, x_2)$, 则仍为仿射变换, 但不是上述同倍率伸缩。

对 $k \in \mathbb{R}$, 映射 $f_k(x_1, x_2) = (x_1 + kx_2, x_2)$ 称为**错切** (shear)。在每条水平线上, 它平移 kx_2 , 因此不同高度的平移量不同。其逆为 f_{-k} , 且它固定第一坐标轴上的每一点。



12.2 不动点

第十一讲的旋转轴和反射平面有一个共同点, 它们的每个点在变换后仍是原来的点。另一方面, 直线或平面作为集合保持不变, 并不意味着其中每一点都不动。下面区分逐点固定与集合整体不变, 并用线性方程描述全部不动点。

定义 12.9 (不动点与不动点集, fixed point). 若 $f(o) = o$, 称 o 为 f 的**不动点**。所有不动点组成的集合 $\{x \mid f(x) = x\}$ 称为 f 的**不动点集**。

例如恒等变换的每一点都是不动点; 非零平移没有不动点。第十一讲关于平面 H 的反射, 不动点集正是 H 。

设 $f(x) = Ax + b$ 。回忆第九讲, 矩阵 $I - A$ 的核为

$$\ker(I - A) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid (I - A)v = 0\} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid Av = v\},$$

即相应齐次线性方程的全部解。第九讲已经证明, 矩阵的核是线性子空间。其中非零的 v 正是 A 属于特征值 1 的特征向量。

性质 12.10 (不动点方程与不动点集). 仿射变换 $f(x) = Ax + b$ 的不动点恰为线性方程

$$(I - A)x = b$$

的解。若 o 为一个不动点, 则全部不动点组成的集合为

$$o + \ker(I - A) = \{o + v \mid v \in \ker(I - A)\},$$

即将线性子空间 $\ker(I - A)$ 平移到 o 所得的集合。特别地, f 恰有一个不动点当且仅当 $\det(I - A) \neq 0$, 此时

$$o = (I - A)^{-1}b.$$

证明. 由 $Ax + b = x$ 直接得到不动点方程. 若 $(I - A)o = b$, 将 x 写为 $o + v$, 则

$$(I - A)x = b + (I - A)v.$$

因此 x 为不动点当且仅当 $v \in \ker(I - A)$, 得到不动点集的表达式.

若 $\det(I - A) \neq 0$, 方程有唯一解 $(I - A)^{-1}b$. 反过来, 若已有不动点 o 而 $\det(I - A) = 0$, 则齐次方程 $(I - A)v = 0$ 有非零解 v , 于是 $o + tv$ 对每个 $t \in \mathbb{R}$ 都是不动点, 不可能唯一. $\square$

若 o 为不动点, 则 $b = o - Ao$, 故

$$f(x) = o + A(x - o), \quad f(o + v) - o = Av.$$

因此, 以不动点 o 为坐标原点后, 变换由线性部分 A 表示. 是否存在不动点取决于方程 $(I - A)x = b$ 是否有解; 一旦有解, 不动点之间的差由 $\ker(I - A)$ 决定.

例子 12.11 (不动点集与不变直线). 令 $f(x_1, x_2, x_3) = (1 - x_2, x_1 - 1, x_3)$, 则

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = (1, -1, 0)^T.$$

不动点方程为 $x_1 + x_2 = 1$ 、 $-x_1 + x_2 = -1$, 第三个方程为 $0 = 0$. 因此 $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3$ 任意, 不动点集是直线 $\{(1, 0, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. 取 $o = (1, 0, 0)$, 写成 $o + Q(x - o)$, 便看出它绕这条直线旋转 $\pi/2$. 此时

$$\ker(I - Q) = \mathbb{R}e_3,$$

所以不动点集正是 $o + \mathbb{R}e_3$.

若改为 $g(x) = (1 - x_2, x_1 - 1, x_3 + 1)$, 线性部分仍为 Q , 所以仍保距. 但不动点方程包含 $x_3 + 1 = x_3$, 因而没有不动点. 轴上的点 $(1, 0, t)$ 此时变为 $(1, 0, t + 1)$, 所以这条直线作为集合仍保持不变, 其中却没有不动点. 这也说明 $\ker(I - Q) \neq \{0\}$ 并不保证不动点存在, 还须检查平移部分.

仿射变换的线性部分同时控制差向量、直线和平面的方向以及不动点之间的差.

12.3 仿射群与保距群

定义 12.12 (群, group). 设 G 为非空集合, 给定运算 $G \times G \rightarrow G$, 记为 $(g, h) \mapsto gh$, 即任意两个元素的乘积仍属于 G . 若对任意 $g, h, k \in G$ 满足结合律 $(gh)k = g(hk)$, 存在元素 $e \in G$ 满足 $eg = ge = g$, 且每个 $g \in G$ 都有元素 $g^{-1} \in G$ 满足 $gg^{-1} = g^{-1}g = e$, 则称 G 为群. 其中 e 称为单位元, g^{-1} 称为 g 的逆元.

群的定义不要求交换律. 对变换, 乘法取为映射复合, $gh = g \circ h$ 表示先作用 h 再作用 g .

定义 12.13 (仿射群与保距群). $\mathbb{R}^n$ 上的全部仿射变换组成仿射群 $\text{Aff}(n, \mathbb{R})$, 全部保距变换组成保距群 $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$, 运算均为映射复合.

下面验证这两个集合满足群的条件. 结合律来自映射复合, 因为两种加括号方式在 x 处都得到 $g(h(k(x)))$. 单位元均为恒等变换 $\text{id}(x) = x$. 它既保持分点参数, 也保持距离, 与任意变换复合都不改变该变换. 由本讲的复合与逆公式, 仿射变换对这两种运算封闭, 且 $f(x) = Ax + b$ 的逆为

$$f^{-1}(y) = A^{-1}y - A^{-1}b.$$

第十一讲已经证明保距变换对复合与取逆封闭。在上述公式中取正交矩阵 $A = Q$ ，便得到保距变换的逆 $f^{-1}(y) = Q^T y - Q^T b$ 。逆映射满足 $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{id}$ ，正是群定义中的逆元条件。因此两者确实都是群。

定义 12.14 (子群, subgroup). 群 G 的子集 H 若包含单位元，且 $g, h \in H$ 蕴含 $gh \in H$ ， $g \in H$ 蕴含 $g^{-1} \in H$ ，称为 G 的**子群**。后两个条件分别称为对乘法、取逆**封闭**。它使用 G 的同一乘法，也满足群的条件，因为结合律直接从 G 继承。

每个保距变换都是仿射变换，且全部保距变换包含恒等变换，对复合与取逆封闭，故 $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ 是 $\text{Aff}(n, \mathbb{R})$ 的子群。下一讲将回顾群与子群，再讨论群作用与图形的等价。

课后例题

1. 求仿射变换 $f(x) = Ax + b$ ，使

$$f(1, 0) = (0, 1), f(2, 0) = (2, 1), f(1, 2) = (1, 3).$$

计算 A, b 并验证 A 可逆及三个条件。再求 f^{-1} ，并求直线 $x_2 = 0$ 的像。

2. 设 $f(x_1, x_2) = (2x_1 + 1, 3x_2 - 2)$ ，求其线性部分 A 和平移部分 b ，解不动点方程并验证不动点唯一。取所求不动点 o ，计算 $f(o + v) - o$ 及 f^{-1} ，并说明 f 是否保距。

几何学 I 第十三讲

叶帆*

2026 年 10 月 30 日

13 群论简介与变换群

本讲对应尤承业《解析几何》第 4 章第 1 节中变换群及第 4 节中图形分类的相关内容。第十至十二讲依次讨论了正交变换、保距变换与仿射变换。本讲先用群与群作用表述这些变换及图形的等价，再从平移与线性部分的复合公式引入半直积，说明仿射群、保距群与正交群的关系。

13.1 群及几类变换群

回忆映射复合， $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ，先作用 g 再作用 f ；恒等映射 $\text{id}(x) = x$ 不改变点；双射的逆映射把每个像点送回唯一原像。复合满足结合律，因为两种加括号方式在 x 处都得到 $f(g(h(x)))$ 。这些正是下面定义在变换上的含义。

定义 13.1 (群, group). 设 G 为非空集合，给定运算 $G \times G \rightarrow G$ ，记为 $(g, h) \mapsto gh$ ，即任意两个元素的乘积仍属于 G 。若对任意 $g, h, k \in G$ 满足结合律 $(gh)k = g(hk)$ ，存在元素 $e \in G$ 满足 $eg = ge = g$ ，且每个 $g \in G$ 都有元素 $g^{-1} \in G$ 满足 $gg^{-1} = g^{-1}g = e$ ，则称 G 为群。其中 e 称为单位元， g^{-1} 称为 g 的逆元。

对变换，乘法就是复合， gh 表示先做 h 再做 g 。结合律由映射复合给出，但群的定义不要求交换律。单位元与逆元唯一，若 e, e' 均为单位元，则 $e = ee' = e'$ ；若 h, k 均为 g 的逆，则 $h = h(gk) = (hg)k = k$ 。

回忆第十一讲的平移 $T_b(x) = x + b$ ，有 $T_b T_c = T_{b+c}$ ，所以两个平移复合后仍为平移； T_0 为恒等变换， T_{-b} 为 T_b 的逆。因此全部平移组成一个群。下面对其他已学的变换作同样的检查。

定义 13.2 (子群, subgroup). 群 G 的子集 H 若包含单位元，且 $g, h \in H$ 蕴含 $gh \in H$ ， $g \in H$ 蕴含 $g^{-1} \in H$ ，称为 G 的子群。后两个条件分别称为对乘法、取逆封闭。它使用 G 的同一乘法，也满足群的条件，因为结合律直接从 G 继承。

定义 13.3 (一般线性群, general linear group). 设 n 为正整数。所有可逆的 $n \times n$ 实矩阵组成的集合记为 $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ ，以矩阵乘法为运算，称为一般线性群。

对 $n \times n$ 实矩阵 A ，记 $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为线性变换 $L_A(x) = Ax$ 。矩阵乘法与映射复合满足

$$L_{AB} = L_A \circ L_B, L_I = \text{id}.$$

若 A 可逆，则 $L_A^{-1} = L_{A^{-1}}$ 。回忆第三讲关于基与线性同构的内容，线性同构是双射的线性映射。对一个有 n 个基向量的实向量空间 V ，选择基后，每个从 V 到自身的线性同构

*本讲义由讲师通过与 Codex GPT-6 的讨论生成。

由唯一的可逆 $n \times n$ 实矩阵表示；矩阵的第 i 列是第 i 个基向量的像的坐标。反过来，每个可逆矩阵都给出这样的线性同构。它们组成的群记为 $GL(V)$ ，其复合对应矩阵乘法。

可逆矩阵的乘积可逆，因为 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ；单位元为 I ，结合律是矩阵乘法的结合律。因此上述集合确实组成群。

定义 13.4 (正交群, orthogonal group). 全部 $n \times n$ 实正交矩阵组成**正交群**

$$O(n) = \{Q \in GL(n, \mathbb{R}) \mid Q^T Q = I\}.$$

其中行列式为 1 的矩阵组成**特殊正交群** (special orthogonal group) $SO(n)$ 。

由第十讲关于正交矩阵与内积的关系， $Q \in O(n)$ 当且仅当 L_Q 保持标准内积。单位矩阵属于 $O(n)$ ；若 $Q, R \in O(n)$ ，则

$$(QR)^T(QR) = R^T Q^T Q R = I, \quad Q^{-1} = Q^T \in O(n).$$

所以 $O(n)$ 为 $GL(n, \mathbb{R})$ 的子群。行列式乘法公式进一步说明 $SO(n)$ 也是子群。 $SO(2)$ 由平面旋转组成， $SO(3)$ 由第十一讲证明的空间旋转组成。

定义 13.5 (保距群与仿射群). 全部保距变换组成**保距群** $\text{Isom}(\mathbb{R}^n)$ ，全部仿射变换组成**仿射群** $\text{Aff}(n, \mathbb{R})$ ，运算均为映射复合。这里仿射变换仍按保持分点参数的双射定义；第十二讲由分点性质推出仿射形式的证明对任意正整数 n 适用。

第十一讲关于保距变换的形式、第十二讲关于仿射变换的复合与逆，给出这两类变换对复合和取逆封闭；它们都包含恒等变换。因此确实得到两个群。保距变换均为仿射变换，通过 $Q \mapsto L_Q$ 将 $O(n)$ 与相应的线性变换群等同后，有子群关系

$$O(n) \subseteq \text{Isom}(\mathbb{R}^n) \subseteq \text{Aff}(n, \mathbb{R}).$$

这里第十一讲由距离恢复正交部分的证明同样适用于 $\mathbb{R}^n$ ，只需使用 n 个标准基向量。第三节将进一步写出两个群的具体形式。

13.2 作用与等价

群的运算只记录变换怎样复合。还需要说明它们作用于什么对象，同一个旋转既可作用于一个点，也可作用于整个圆或椭圆。为统一表述，先用集合 X 记录这些对象，再写出变换与对象之间的关系。

定义 13.6 (群作用, group action). 群 G 在集合 X 上的**作用**是映射 $G \times X \rightarrow X$ ，记为 $g \cdot x$ ，满足

$$e \cdot x = x, \quad (gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x).$$

第二个条件要求群内的乘法与先后作用一致。每个 g 给出 X 的双射，因为 $g^{-1} \cdot (g \cdot x) = (g^{-1}g) \cdot x = x$ ，反向复合也成立。对上一节的变换群，取 $X = \mathbb{R}^n$ 、 $g \cdot x = g(x)$ ，便是最直接的例子。

定义 13.7 (轨道, orbit). 元素 $x \in X$ 的**轨道**为 $G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$ ，即从 x 出发应用群中全部变换所能得到的对象组成的集合。

例子 13.8 (点与图形). 平移群作用在 $\mathbb{R}^2$ 的点上时，每个点的轨道都是整个平面，因为从 x 到 y 可用平移 T_{y-x} 。 $SO(2)$ 作用在平面上时，原点的轨道只有原点；非零点 x 的轨道为半径 $\|x\|$ 的圆，因为旋转保持长度，并能取遍所有方向。

变换还可作用在图形上。此时 X 取为 $\mathbb{R}^2$ 的所有子集组成的集合，规定 $g \cdot S = \{g(x) \mid x \in S\}$ 。这满足作用的两个条件，因为恒等变换保持 S ，且 $(gh)(S) = g(h(S))$ 。以原点为

圆心的圆在全部平面旋转下保持不变, 所以这个圆作为一个图形的轨道只含它自身。这里轨道的元素是图形, 而前一段轨道的元素是平面上的点。

性质 13.9 (轨道与等价关系). 规定 $x \sim y$ 当且仅当存在 $g \in G$ 使 $y = g \cdot x$, 则 $\sim$ 为等价关系, 其等价类就是轨道。

回忆第一讲关于等价关系的定义, 它要求自反性、对称性与传递性; 一个元素的等价类由所有与它等价的元素组成。在这里, 这三个条件恰好对应单位元、逆元与复合。

证明. 由 $e \cdot x = x$ 得到自反性。若 $y = g \cdot x$, 则 $x = g^{-1} \cdot y$, 得到对称性。若还有 $z = h \cdot y$, 则 $z = (hg) \cdot x$, 得到传递性。 $\square$

定义 13.10 (图形的等价). 对 $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$, 若存在仿射变换 f 使 $f(S) = T$, 称它们**仿射等价**; 若可选 f 为保距变换, 称它们**保距等价**, 也称**全等**。仿射等价类、保距等价类分别是仿射群、保距群在图形集合上作用的轨道。

例子 13.11 (相似变换与相似类). 形如 $f(x) = \lambda Qx + b$ 的变换称为**相似变换** (similarity transformation), 其中 $\lambda > 0$ 、 $Q \in O(n)$ 、 $b \in \mathbb{R}^n$ 。它满足

$$\|f(x) - f(y)\| = \lambda \|x - y\|.$$

若存在相似变换 f 使 $f(S) = T$, 则称图形 S, T **相似**。恒等变换是相似变换, 相似变换的复合与逆仍为相似变换, 因此相似是等价关系, 其等价类称为**相似类**。全等对应于可以取 $\lambda = 1$ 的情形。

等价关系来自恒等、逆与复合, 不需要对每类图形分别验证。保距群是仿射群的子群, 所以保距等价蕴含仿射等价, 逆向一般不成立。第九讲关于二次方程的正交换轴与平移, 给出原图形在新坐标中的标准方程。若将新旧坐标都画在同一个固定坐标系中, 则 $x = Qy + x_0$ 把标准方程的解集映到原图形, 两者保距等价。

定义 13.12 (不变量, invariant). 设群 G 作用在集合 X 上。给每个 $x \in X$ 指定一个量, 若对任意 $g \in G$, 它在 x 与 $g \cdot x$ 处的值相同, 则称这个量为该作用的**不变量**。

例如, 以点对为对象, 保距变换保持两点的距离, 而一般仿射变换不保持。若某个不变量在两个对象上取值不同, 这两个对象就不等价; 取值相同则仍需构造变换或使用分类定理。

例子 13.13 (球面与椭球面). 仿射变换 $f(x) = (2x_1, x_2, x_3)$ 将单位球面 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ 映到椭球面

$$\frac{y_1^2}{4} + y_2^2 + y_3^2 = 1,$$

因为代入 $y = f(x)$ 后, 两方程相同, 且 f 可逆。因此两者仿射等价。单位球面上任意两点的距离至多为 2, 而椭球面上的 $(2, 0, 0)$ 与 $(-2, 0, 0)$ 距离为 4, 因此两者不全等。

13.3 仿射群、保距群与半直积

回忆第十二讲关于仿射变换的矩阵形式, $f(x) = Ax + b$, 其中 A 可逆, $b = f(0)$ 。利用线性变换 $L_A(x) = Ax$, 可写成 $f = T_b \circ L_A$, 即先作线性变换, 再作平移。第十一讲关于保距变换的形式说明, f 保距当且仅当 A 正交。

性质 13.14 (平移与固定原点的部分). 每个仿射变换都唯一写成 $T_b L_A$, 其中 $b \in \mathbb{R}^n$ 、 $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ 。固定原点的仿射变换恰为 L_A , 其中 $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$; 固定原点的保距变换恰为 L_Q , 其中 $Q \in O(n)$ 。

证明. 上述矩阵形式给出分解的存在性. 若 $T_b L_A = T_c L_B$, 代入 0 得到 $b = c$, 进而对每个 x 有 $Ax = Bx$, 所以 $A = B$. 此外, $f(0) = 0$ 当且仅当 $b = 0$; 保距条件再要求 $A^T A = I$. $\square$

若改为固定点 o , 则 $f(o) = o$ 等价于 $b = o - Ao$, 此时

$$f(x) = o + A(x - o), \quad f = T_o L_A T_{-o}.$$

这正是第十二讲不动点方程的另一种写法. 取 $A \in O(n)$ 便得到固定 o 的全部保距变换.

性质 13.15 (两个群的乘法). 沿用 (A, b) 记录 $x \mapsto Ax + b$, 则

$$(A, b)(B, c) = (AB, Ac + b), \quad (A, b)^{-1} = (A^{-1}, -A^{-1}b).$$

单位元为 $(I, 0)$. 仿射群允许任意可逆 A ; 保距群要求 $A \in O(n)$.

证明. 复合时, $A(Bx + c) + b = ABx + Ac + b$; 解 $y = Ax + b$ 得到 $x = A^{-1}y - A^{-1}b$, 分别给出乘法与逆的公式. $\square$

因此, 乘法中的平移部分为 $Ac + b$. 先作的平移 c 还要经过后一个线性变换 A . 下面把这种关系写成对子群的陈述.

性质 13.16 (平移在共轭下的变化). 设 $f(x) = Ax + b$ 为仿射变换, 则对任意 $c \in \mathbb{R}^n$, 有

$$f T_c f^{-1} = T_{Ac}.$$

证明. 对任意 x , 有 $f(T_c(f^{-1}(x))) = f(f^{-1}(x) + c) = x + Ac$. $\square$

乘积 ghg^{-1} 称为 h 经 g 的**共轭** (conjugate). 上式说明平移经仿射变换共轭后仍是平移; 由于 A 可逆, c 取遍 $\mathbb{R}^n$ 时 Ac 也取遍 $\mathbb{R}^n$, 所以共轭把整个平移群映到自身.

定义 13.17 (正规子群, normal subgroup). 设 N 为群 G 的子群. 若对每个 $g \in G$, 有 $gNg^{-1} = N$, 则称 N 为 G 的**正规子群**. 这里 gNg^{-1} 表示集合 $\{gug^{-1} \mid u \in N\}$.

因此, 平移群在仿射群和保距群中都是正规子群. 另一方面, 每个变换的平移与线性部分已经证明唯一. 我们用下面的定义同时记录这两件事.

定义 13.18 (半直积, semidirect product). 设 N, H 为群 G 的子群. 若 N 为正规子群, 且每个 $g \in G$ 都唯一写成 $g = uh$, 其中 $u \in N, h \in H$, 则称 G 为 N 与 H 的**半直积**, 记为 $G = N \rtimes H$.¹

在这里, 平移群通过 $b \leftrightarrow T_b$ 与向量加法对应, 因为 $T_b T_c = T_{b+c}$. 将它记为 $\mathbb{R}^n$, 并通过 $A \mapsto L_A$ 将矩阵群与相应的固定原点的线性变换群等同, 便得到

$$\text{Aff}(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \rtimes \text{GL}(n, \mathbb{R}), \quad \text{Isom}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \rtimes O(n).$$

两式中的作用都是矩阵对平移向量的自然作用 $c \mapsto Ac$. 事实上, 取 $b = 0$ 的共轭公式并重新排列复合, 得到

$$(T_b L_A)(T_c L_B) = T_b (L_A T_c L_A^{-1}) L_{AB} = T_{b+Ac} L_{AB}.$$

这与前面的乘法公式完全一致, 说明半直积中的线性部分怎样影响平移部分. 至此, $O(n)$ 给出固定原点的保距变换, 平移允许原点移动, 半直积给出二者共同的复合规律. 一般仿射群只需把 $O(n)$ 换为 $\text{GL}(n, \mathbb{R})$. 下一讲从平面旋转 $\pi/2$ 出发, 讨论复数乘法与线性变换的关系.

¹这是 Milne (2021) Definition 3.8 的等价表述, 以唯一分解代替 $NH = G$ 及 $N \cap H = \{e\}$.

课后例题

1. 平面保距群作用在有序点对上, 规定 $f \cdot (x, y) = (f(x), f(y))$ 。说明距离 $\|y - x\|$ 在此作用下不变, 并证明 $(0, e_1)$ 的轨道恰为

$$\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid \|b - a\| = 1\}.$$

再判断有序点对 $((2, -1), (2, 0))$ 与 $((2, -1), (4, -1))$ 是否属于该轨道; 对属于者给出一个具体保距变换。

2. 取平面旋转 $R(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$ 及平移 $T_{e_1}(x) = x + e_1$ 。计算 $R \circ T_{e_1}$ 与 $T_{e_1} \circ R$, 并说明二者是否相同。再计算 $R \circ T_{e_1} \circ R^{-1}$, 验证它仍是平移, 并确定其平移向量。

课后例题解答

第十讲

1. A 的特征多项式为

$$\det(A - \lambda I) = (4 - \lambda)(2 - \lambda)(1 - \lambda),$$

故特征值为 $4, 2, 1$ 。对应的一组单位特征向量为

$$q_1 = \frac{(1, 1, 0)}{\sqrt{2}}, \quad q_2 = \frac{(-1, 1, 0)}{\sqrt{2}}, \quad q_3 = (0, 0, 1).$$

令 $Q = [q_1 \ q_2 \ q_3]$, 则 $Q^T Q = I$ 且 $D = Q^T A Q = \text{diag}(4, 2, 1)$ 。令 $x = Qy$ 后, 方程化为

$$4y_1^2 + 2y_2^2 + y_3^2 = 4.$$

三个半轴长依次为 $1, \sqrt{2}, 2$ 。

2. 特征多项式为

$$\det(A - \lambda I) = (-1 - \lambda)(1 - \lambda)(3 - \lambda),$$

故特征值为 $3, 1, -1$ 。取正交单位特征向量 $(1, 1, 0)/\sqrt{2}$, $(-1, 1, 0)/\sqrt{2}$, $(0, 0, 1)$ 作为 Q 的列, 则 $Q^T A Q = \text{diag}(3, 1, -1)$ 。直接计算得

$$Q^T b = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 4)^T,$$

从而

$$q(Qy) = 3y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 + \sqrt{2}y_1 - \sqrt{2}y_2 + 4y_3 - 3.$$

完成平方为

$$q(Qy) = 3 \left(y_1 + \frac{\sqrt{2}}{6} \right)^2 + \left(y_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - (y_3 - 2)^2 + \frac{1}{3}.$$

第十一讲

1. 绕 e_3 轴的旋转矩阵为

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

因此 $f(x) = Rx + o - Ro = (-x_2, x_1 - 2, x_3)$, 即 $Q = R$ 、 $b = (0, -2, 0)$ 。逐项代入得

$$f(0) = (0, -2, 0), \quad f(e_1) = (0, -1, 0), \quad f(e_2) = (-1, -2, 0), \quad f(e_3) = (0, -2, 1).$$

对 $x = o + te_3 = (1, -1, 2+t)$, 有 $f(x) = x$, 所以该直线逐点固定。又 $Q^T Q = I$, 故

$$\|f(x) - f(y)\| = \|Q(x - y)\| = \|x - y\|.$$

2. 平面的单位法向量为 $n = (1, 1, 0)/\sqrt{2}$, 且可取 $o = (2, 0, 0) \in H$ 。反射公式为

$$S_H(x) = x - 2(n \cdot (x - o))n = x - (x_1 + x_2 - 2)(1, 1, 0).$$

于是 $S_H(0, 0, 1) = (2, 2, 1)$ 、 $S_H(2, 2, 1) = (0, 0, 1)$, 而 $S_H(2, 0, -1) = (2, 0, -1)$ 。反射使法向分量变号、平行于 H 的分量不变, 连续作用两次为恒等映射。前两点中点为 $(1, 1, 1) \in H$, 第三点在 H 上, 故被固定。

第十二讲

1. 由三个点的像相减得到

$$A(1, 0) = (2, 0), A(0, 2) = (1, 2),$$

所以 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。再由 $f(1, 0) = (0, 1)$ 得 $b = (-2, 1)$, 从而

$$f(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2/2 - 2, x_2 + 1).$$

$\det A = 2 \neq 0$, 且代入三点均满足条件。由 $y_2 = x_2 + 1$ 及 $y_1 = 2x_1 + x_2/2 - 2$ 解得

$$f^{-1}(y_1, y_2) = \left(\frac{2y_1 - y_2 + 5}{4}, y_2 - 1 \right).$$

直线 $x_2 = 0$ 在 f 下满足 $y_2 = 1$, 其像为直线 $y_2 = 1$ 。

2. $A = \text{diag}(2, 3)$ 、 $b = (1, -2)$ 。不动点方程 $(I - A)x = b$ 即 $-x_1 = 1$ 、 $-2x_2 = -2$, 唯一解为 $o = (-1, 1)$ 。对 $v = (v_1, v_2)$, 有

$$f(o + v) - o = (2v_1, 3v_2), f^{-1}(y_1, y_2) = \left(\frac{y_1 - 1}{2}, \frac{y_2 + 2}{3} \right).$$

取 $v = e_1$ 可见差向量长度由 1 变为 2, 故 f 不保距。

第十三讲

1. 由 $Q^T Q = I$, 保距变换 $f(x) = Qx + c$ 满足

$$\|f(y) - f(x)\| = \|Q(y - x)\| = \|y - x\|,$$

故距离不变。于是 $(0, e_1)$ 的轨道包含于题给集合。反过来, 若 $\|b - a\| = 1$, 令 $u = b - a = (u_1, u_2)$, 取

$$Q = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix}.$$

则 $Q^T Q = I$ 且 $Qe_1 = u$ 。保距变换 $f(x) = Qx + a$ 满足 $f(0) = a$ 、 $f(e_1) = b$, 故包含关系反向也成立。

第一对点的距离为 1, 属于轨道。例如取 $f(x) = x + (2, -1)$, 便将 $(0, e_1)$ 映为该点对。第二对点的距离为 2, 不属于轨道, 因为保距变换保持两点间距离。

2. 对 $R(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$, 直接代入得

$$R \circ T_{e_1}(x_1, x_2) = (-x_2, x_1 + 1), T_{e_1} \circ R(x_1, x_2) = (1 - x_2, x_1),$$

所以两复合不同。又 $R^{-1}(x_1, x_2) = (x_2, -x_1)$, 因此

$$R \circ T_{e_1} \circ R^{-1}(x_1, x_2) = (x_1, x_2 + 1) = T_{e_2}(x_1, x_2).$$

旋转将平移向量 e_1 变为 $Re_1 = e_2$ 。